

2018 年度入学 第 2 期
日本大学联合学力测试
上级数学

2017 年 5 月实施

(90 分钟)

在考试开始前请勿打开本考卷，仔细阅读下述注意事项。
请填写考试编号与姓名。

注意事项

1. 考卷共 3 页。
2. 答题纸为单面 1 张。
3. 若发现本考卷存在印刷不清晰、缺页、错页或答题纸污损时，请举手告知监考老师。
4. 考卷上共有 3 大项必答题目。
5. 答题纸上请同样填写准考证号与姓名。
6. 答题时请务必使用黑色铅笔，将答案填写在答题纸指定栏中。
7. 考卷上可书写笔记或计算草稿等。
8. 考试结束时，请再次确认准考证号、姓名，并按照监考老师指示提交答题纸与考卷。

准考证号	姓名

1 等差数列 $\{a_n\}$ 满足以下(A)、(B)两个条件:

$$(A) \quad a_6 = 12$$

$$(B) \quad a_{15} = 5a_3$$

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的首项和公差, 并用含 n 的代数式写出表示数列第 n 项 a_n 的值。

(2) 求 $\{a_n\}$ 从首项到第 10 项的和。

(3) 已知: 在群数列中, 第 1 群中的 2^{a_1} 有 1 个, 第 2 群中的 2^{a_2} 有 2 个, 第 3 群中的 2^{a_3} 有 3 个……第 m 群 ($m = 1, 2, 3, \dots$) 中的 2^{a_m} 有 m 个。如下所示:

第 1 群	第 2 群	第 3 群	第 4 群	...
2^{a_1}	$ 2^{a_2}, 2^{a_2}$	$ 2^{a_3}, 2^{a_3}, 2^{a_3}$	$ 2^{a_4}, 2^{a_4}, 2^{a_4}, 2^{a_4}$	$ 2^{a_5}, \dots$

假设第 m 群的末项为 b_m , 则第 1 群的末项为 b_1 , 第 2 群的末项为 b_2 , 第 3 群的末项为 b_3 ……以此类推。

(i) 用含 m 的代数式写出表示数列第 m 项 b_m 的值。

(ii) 用含 m 的代数式写出 $b_1 + b_2 + b_3 \dots + b_m$ 的值。

(iii) 若从首项 2^{a_1} 开始计算, 则 b_m 为第几项。

(iv) 求从 2^{a_1} 到 b_m 的和。

2 平面 xy 上有两个圆:

$$C_1: x^2 + y^2 - 2x - 6y + 9 = 0,$$

$$C_2: x^2 + y^2 - 8ax - 6ay + 21a^2 = 0 \quad (a \text{ 为正常数})$$

C_1 的中心为 A, C_2 的中心为 B。

- (1) 用 a 来表示线段 AB 的长度。
- (2) 求当 C_1 、 C_2 外切时的 a 可取到的所有值。
- (3) 设 a 的值为 (2) 中求得的最大值:
 - (i) 求: C_1 和 C_2 的切点坐标。
 - (ii) 求: 与 C_1 和 C_2 同时相切的直线方程。
 - (iii) 求: (ii) 中求得的直线围成的图形面积。

3 已知：平面 xy 的原点为 O ，平面 xy 上有椭圆 C_1 和双曲线 C_2 ，表达式如下：

$$\text{椭圆 } C_1: \frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{2} = 1,$$

$$\text{双曲线 } C_2: \frac{x^2}{4} - y^2 = k \quad (k \text{ 为正常数})$$

- (1) 求 C_1 的长轴长度、短轴长度，以及焦点的坐标；
- (2) 设 C_2 的渐近线和 C_1 的交点中，位于第 1 象限的点为 A ，求 A 点的坐标；
并求通过 A 点的 C_1 的切线 l 的方程；
- (3) 假设 C_2 通过(2)中求得的 l 与 x 轴的交点，
 - (i) 求 k 的值。
 - (ii) 设 C_2 上的一点为 P ， $OP = p$ 。 C_2 的焦点为 F 、 F' ，用 p 来表示 2 条线段长度的乘积 $PF \cdot PF'$ 。